

Лекция 5.

Цифровые алгоритмы пеленгации

Существуют три основных класса цифровых пеленгационных алгоритмов: непараметрические, собственноструктурные и параметрические. Для применения в случае скоростной пеленгации наиболее подходят непараметрические и собственноструктурные алгоритмы. Параметрические алгоритмы пеленгации обладают гораздо более высокой вычислительной сложностью, что делает их малоприспособными к использованию при скоростных вычислениях, но они весьма удобны в постобработке, которая не накладывает столь жестких ограничений на производительность пеленгационной системы как анализ угловых координат в режиме реального времени.

Постановка задачи

Пусть на произвольную плоскую антенную решетку (АР), состоящую из N ненаправленных антенных элементов (АЭ), приходят узкополосные сигналы от M источников радиоизлучения (ИРИ), находящихся в дальней зоне излучения. Представим сигнал, принимаемый i -м АЭ, в комплексной форме:

$$\dot{X}_i(t) = \sum_{m=1}^M \dot{s}_m(t) e^{j\Delta\psi_{im}} + \dot{n}_i(t), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, N$ – номер антенного элемента (АЭ), $m = 1, \dots, M$ – номер ИРИ, $\dot{s}_m(t)$ – сигнал m -го ИРИ, $\dot{n}_i(t)$ – комплексный белый гауссовский шум на i -м АЭ, $e^{j\Delta\psi_{im}}$ – множитель, учитывающий фазовый набег m -го сигнала на i -й АЭ относительно опорного АЭ.

Вычислим фазовый набег сигнала с частотой f исходящего из точки С между двумя произвольными элементами АР, расположенными в точках A_1 и A_2 (рис. 1):

$$\Delta\psi = \frac{2\pi f}{c} d, \quad (2)$$

где c – скорость распространения волны.

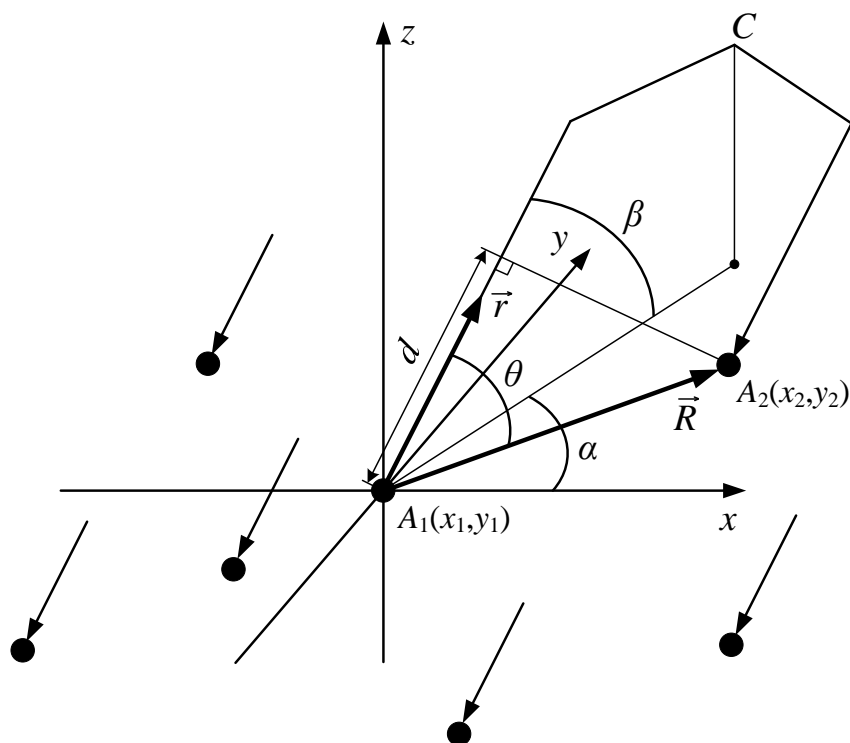


Рис.1. Взаимное расположение источника радиоизлучения C и элементов антенной решетки в трехмерном пространстве.

Согласно рис.1 расстояние d можно выразить следующим образом:

$$d = |\vec{R}| \cos \theta = |\vec{R}| \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{|\vec{R}| \cdot |\vec{r}|} = \vec{R} \cdot \vec{r}, \quad (3)$$

где \vec{r} – единичный вектор, совпадающий с направлением на ИРИ, \vec{R} – вектор, соединяющий антенные элементы A_1 и A_2 , θ – угол между векторами \vec{R} и \vec{r} .

Запишем (3) в следующем виде

$$d = \vec{R} \cdot \vec{r} = (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0, \quad (4)$$

где x_1, y_1 и x_2, y_2 – соответственно координаты антенных элементов A_1 и A_2 , x_0, y_0 – проекции единичного вектора \vec{r} на оси Ox и Oy .

Выразим x_0 и y_0 через азимутальный угол α и угол места β :

$$x_0 = \cos \beta \cos \alpha, \quad (5)$$

$$y_0 = \cos \beta \sin \alpha. \quad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (4), а затем (4) в (2) получаем:

$$\Delta\Psi = \frac{2\pi f}{c} \cos\beta [(x_2 - x_1) \cos\alpha + (y_2 - y_1) \sin\alpha]. \quad (7)$$

Таким образом, из (7) следует, что фазовый набег m -го сигнала на i -й АЭ относительно опорного АЭ определяется следующим выражением:

$$\Delta\Psi_{im} = \frac{2\pi f_m}{c} \cos\beta_m [(x_i - x_{\text{оп}}) \cos\alpha_m + (y_i - y_{\text{оп}}) \sin\alpha_m], \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M.$$

Представим выражение (1) в матричной форме:

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_M] \begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{s}_M(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{n}_1(t) \\ \dot{n}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{n}_N(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (9)$$

где $\mathbf{x}(t) = [\dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t), \dots, \dot{X}_N(t)]^T$ – N -мерный вектор сигналов, принимаемых антенной решеткой, $\mathbf{s}(t)$ – M -мерный вектор сигналов ИРИ, $\mathbf{n}(t)$ – N -мерный шумовой вектор, \mathbf{A} – матрица размерностью $N \times M$, состоящая из M векторов:

$$\mathbf{a}_m = [e^{j\Delta\Psi_{1i}}, e^{j\Delta\Psi_{2i}}, \dots, e^{j\Delta\Psi_{Ni}}]^T, \quad m = 1, \dots, M. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{j\Delta\Psi_{11}} & e^{j\Delta\Psi_{12}} & \dots & e^{j\Delta\Psi_{1M}} \\ e^{j\Delta\Psi_{21}} & e^{j\Delta\Psi_{22}} & \dots & e^{j\Delta\Psi_{2M}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{j\Delta\Psi_{N1}} & e^{j\Delta\Psi_{N2}} & \dots & e^{j\Delta\Psi_{NM}} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

При переходе к цифровым отсчетам сигналов выражение (9) принимает вид:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k), \quad (12)$$

где $k = 1, \dots, K$ – номер цифрового отсчета.

Целью цифровых пеленгационных алгоритмов является определение количества M источников радиоизлучения, а также угловых координат $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M$ с помощью обработки корреляционной матрицы \mathbf{R} , формируемой из K цифровых отсчетов сигналов с выходов АР:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k). \quad (13)$$

Подставляя выражение (12) в (13) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [\mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k)][\mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k)]^H = \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [\mathbf{A}\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^H(k)\mathbf{A}^H + \mathbf{A}\mathbf{s}(k)\mathbf{n}(k)^H + \mathbf{n}(k)\mathbf{s}^H(k)\mathbf{A}^H + \mathbf{n}(k)\mathbf{n}(k)^H] \end{aligned} \quad (14)$$

Будем полагать, что сигналы от разных ИРИ не коррелированы, шумы не коррелированы между каналами и с сигналами от ИРИ, мощности шумов во всех каналах одинаковы. В этом случае выражение (14) принимает вид:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [\mathbf{A}\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^H(k)\mathbf{A}^H + \mathbf{n}(k)\mathbf{n}(k)^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (15)$$

где \mathbf{R}_s – корреляционная матрица сигналов ИРИ, σ_n^2 – дисперсия шума, \mathbf{I} – единичная матрица.

Непараметрические алгоритмы

Классическим методом пеленгации источников радиоизлучения, является способ формирования сканирующего луча (рис. 2), заключающийся в умножении вектора сигналов $\mathbf{X}(k)$, принятых АР, на детерминированный вектор волнового фронта. Вектор волнового фронта $\mathbf{q}(\alpha_i)$ определяет значения комплексных амплитуд для гармонического сигнала проходящего с направления сканирования α_i в элементах антенной решетки относительно начала координат, где L – количество направлений сканирования, $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_L]$ – сектор сканирования.

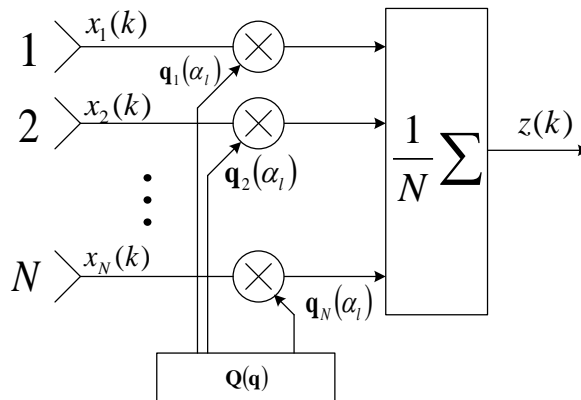


Рис. 2 Схема формирования сканирующего луча.

Угловой спектр мощности в данном случае, будет записываться как:

$$\mathbf{P}_l = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{q}^H(\alpha_l) \mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k) \mathbf{q}(\alpha_l) = \mathbf{q}^H(\alpha_l) \mathbf{R} \mathbf{q}(\alpha_l) \quad (16)$$

В случае обработки данных в режиме «реального времени» удобно записать выражение (16) в рекурсивной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{l,K+1} &= \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbf{q}^H(\alpha_l) \mathbf{X}(k+1) \mathbf{X}^H(k+1) \mathbf{q}(\alpha_l) = \\ &= \frac{K}{K+1} \mathbf{P}_{l,K} + \frac{1}{K+1} \mathbf{X}(K+1) \mathbf{X}^H(K+1) \end{aligned} \quad (17)$$

Основной недостаток данного подхода, заключается в том, что если источники сосредоточены в пределах главного луча диаграммы направленности антенной решетки, то путем формирования сканирующего луча невозможно их различить. Известен ряд алгоритмов, которые превосходят этот предел, в литературе они названы алгоритмы сверхразрешения.

Один из наиболее широко известных методов сверхразрешения - метод Кейпона был предложен в 1969 году для разрешения спектральных компонент дискретного спектра. Однако учитывая аналогию между пространственным и частотным спектрами, в последствии данный метод был применен для оценивания угловых координат сигналов. Основная идея заключалась в минимизации средней мощности на выходе антенной решетки, при условии фиксированного коэффициента передачи, равного, например, единице, для некоторого угла α . Математически это можно записать следующим образом:

$$\min_W \left\langle \left| \mathbf{W}^H \mathbf{X} \right|^2 \right\rangle \text{ при условии } \mathbf{W}^H \mathbf{q}(\gamma) = 1$$

Выходная функция для данного способа определяется как:

$$f_{\text{Capon}}(\alpha) = \frac{1}{\mathbf{q}^H(\alpha) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{q}(\alpha)} \quad (18)$$

Расчет обратной корреляционной матрицы занимает порядка $O(N^3)$ операций, что существенно сказывается на скорости обработки данных в режиме «реального времени». Для повышения быстродействия пеленгационной системы, реализующей метод Кейпона, удобно представить расчет обратной корреляционной матрицы в рекурсивной форме. Для этого воспользуемся частным случаем леммы об обращении матриц:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{y}\mathbf{y}^H\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\mathbf{y}^H\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{y}^H\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}} \quad (19)$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица, размером $N \times N$, \mathbf{y} – вектор-столбец, размером $N \times 1$. Тогда, вычисление обратной корреляционной матрицы можно представить в виде:

$$\mathbf{R}_{K+1}^{-1} = \frac{1}{K+1} \left[\mathbf{R}_{\text{ненорм},K}^{-1} - \frac{\mathbf{R}_{\text{ненорм},K}^{-1} \mathbf{X}_{K+1} \mathbf{X}_{K+1}^H \mathbf{R}_{\text{ненорм},K}^{-1}}{1 + \mathbf{X}_{K+1}^H \mathbf{R}_{\text{ненорм},K}^{-1} \mathbf{X}_{K+1}} \right] \quad (20)$$

где $\mathbf{R}_{\text{ненорм},K}$ – ненормированная матрица корреляции сигналов, связанная с нормированной как:

$$\mathbf{R}_K = \frac{1}{K} \mathbf{R}_{\text{ненорм},K} \quad (21)$$

Подобный подход позволяет получать адаптивную пеленгационную характеристику $f_{\text{Сарон}}(\alpha, k)$ изменяющуюся во времени, с вычислительными затратами порядка $O(N^2)$ операций.

В дальнейшем, были предложены схожие адаптивные методы, опирающиеся на входные данные при вычислении пеленгационной характеристики: метод «теплого шума», метод Борджотти-Лагунаса. Их выходные функции можно представить как:

$$f_{\text{thermal noise}}(\alpha) = \frac{1}{\mathbf{q}^H(\alpha) \mathbf{R}^{-2} \mathbf{q}(\alpha)} \quad (22)$$

$$f_{\text{Борджотти-Лагунаса}}(\alpha) = \frac{\mathbf{q}^H(\alpha) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{q}(\alpha)}{\mathbf{q}^H(\alpha) \mathbf{R}^{-2} \mathbf{q}(\alpha)} \quad (23)$$

Аналогично, для получения пеленгационных характеристик, зависящих от времени в формулы (22) и (23) следует подставить (20). В ряде работ показано, что среди непараметрических методов непрерывного анализа, разрешающая способность метода Кейпона ниже, чем у методов «теплового шума» и Борджотти-Лагунаса. Но наличие случайных амплитудно-фазовых ошибок в каналах приема и конечная длина выборки могут свести на нет преимущество этих методов над методом Кейпона.

В ряде работ был представлен метод IAA (iterative adaptive approach), базирующийся на итеративном вычислении средней мощности сигнала полученного с антенной решетки, используя адаптивное формирование весовых коэффициентов для каждого выбранного направления сканирования. Показано, что по параметрам IAA не уступает параметрическим методам, и, не смотря на высокую вычислительную сложность, существует возможность применять IAA при скоростной обработке данных.

Собственноструктурные алгоритмы.

Собственными значениями матрицы \mathbf{R} называются такие числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ для которых справедливо следующее соотношение

$$|\mathbf{R} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0. \quad (24)$$

Используя (12) можно записать

$$|\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} - \lambda_i\mathbf{I}| = |\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H - (\lambda_i - \sigma_n^2)\mathbf{I}| = 0. \quad (25)$$

Таким образом, собственные значения матрицы \mathbf{R}_s равны

$$(\lambda_s)_i = \lambda_i - \sigma_n^2. \quad (26)$$

Поскольку матрица \mathbf{A} состоит из векторов фазовых распределений, которые линейно независимы, то ее ранг равен M . А матрица $(\mathbf{S}\mathbf{S}^H)$ размерностью $M \times M$ также имеет ранг M до тех пор, пока приходящие сигналы не сильно коррелированы.

Таким образом, при условии, что число приходящих сигналов M меньше количества элементов в решетке N , матрица \mathbf{R}_s есть матрица размерностью $N \times N$ и рангом M . Это означает, что $N - M$ собственных

значений матрицы \mathbf{R}_s равны нулю. Из (26) следует, что $N-M$ собственных значений \mathbf{R} равны средней мощности шума σ_n^2 . Далее отсортируем собственные значения \mathbf{R} так, что λ_0 будет максимальным, а λ_N – минимальным собственным значением. Следовательно,

$$\lambda_{M+1} = \lambda_{M+2} = \dots = \lambda_N = \sigma_n^2. \quad (27)$$

Следовательно, если найдено количество наименьших собственных значений B , то число сигналов M может быть вычислено по формуле:

$$M = N - B. \quad (28)$$

Собственный вектор \mathbf{V}_i матрицы \mathbf{R} , соответствующий собственному значению λ_i , удовлетворяет следующему соотношению

$$(\mathbf{R} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{V}_i = 0. \quad (29)$$

Для собственных векторов связанных с $N-M$ наименьшими собственными значениями матрицы \mathbf{R} имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{V}_i &= (\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} - \sigma_n^2\mathbf{I})\mathbf{V}_i = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H\mathbf{V}_i = 0, \\ i &= (M+1), \dots, N. \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку \mathbf{A} имеет полный ранг и \mathbf{R}_s является невырожденной, то из (28) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^H\mathbf{V}_i &= 0, \\ i &= (M+1), \dots, N. \end{aligned} \quad (31)$$

Это означает, что собственные векторы, связанные с $N-M$ наименьшими собственными значениями, ортогональны M векторам образующим матрицу \mathbf{A} .

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_M\} \perp \{\mathbf{V}_{M+1}, \mathbf{V}_{M+2}, \dots, \mathbf{V}_N\}. \quad (32)$$

На основании проведенного анализа можно сделать заключение о том, что собственные векторы $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_M$, называемые сигнальными, коллинеарны векторам $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M$ и им соответствуют собственные значения $(\lambda_s)_1 + \sigma_n^2, \dots, (\lambda_s)_M + \sigma_n^2$. Собственные векторы $\mathbf{V}_{M+1}, \dots, \mathbf{V}_N$, называемые шумовыми, ортогональны векторам $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M$ и всем им соответствует одно и то же собственное значение σ_n^2 . Отсюда следует, что собственные векторы

матрицы \mathbf{R} лежат в одном из двух ортогональных подпространств: подпространстве сигналов и подпространстве шума. Векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M$ лежат в подпространстве ортогональном подпространству шума.

Запишем выражение для фазы в случае произвольных углов α и β :

$$\Delta\psi_i(\alpha, \beta) = \frac{2\pi f_c}{c} \cos \beta [(x_i - x_{\text{он}}) \cos \alpha + (y_i - y_{\text{он}}) \sin \alpha], \quad (33)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

где f_c – частота сканирования.

Используя (33) сформируем управляющий вектор

$$\mathbf{q}(\alpha, \beta) = [e^{j\Delta\psi_1(\alpha, \beta)}, e^{j\Delta\psi_2(\alpha, \beta)}, \dots, e^{j\Delta\psi_N(\alpha, \beta)}]^T. \quad (34)$$

Путем поиска среди всех возможных значений вектора $\mathbf{q}(\alpha, \beta)$ необходимо определить векторы ортогональные к векторам шумового пространства, в результате направление прихода m -го сигнала будет определено. Для этого сформируем матрицу, содержащую шумовые собственные векторы:

$$\mathbf{U}_n = (\mathbf{V}_{M+1}, \dots, \mathbf{V}_N). \quad (35)$$

Предположим, что частоты всех сигналов одинаковы и совпадают с частотой сканирования:

$$f_1 = f_2 = \dots = f_M = f_c. \quad (36)$$

В этом случае выполняется равенство

$$\mathbf{q}(\alpha_m, \beta_m) = \mathbf{a}_m, \quad (37)$$

$$m = 1, \dots, M.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{q}(\alpha_1, \beta_1), \dots, \mathbf{q}(\alpha_M, \beta_M)$ ортогональны векторам шумового пространства, и для углов α и β , соответствующих направлениям прихода сигналов, справедливо выражение

$$(\mathbf{q}^H(\alpha, \beta) \mathbf{U}_n)^2 = \mathbf{q}^H(\alpha, \beta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{q}(\alpha, \beta) = 0 \quad (38)$$

Таким образом, углы прихода сигналов могут быть определены путем нахождения максимумов функции

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{\mathbf{q}^H(\alpha, \beta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{q}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{\mathbf{q}^H(\alpha, \beta) \left(\sum_{i=M+1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \mathbf{q}(\alpha, \beta)}. \quad (39)$$

Для того чтобы определить направления прихода сигналов α_m, β_m необходимо найти положения M самых больших максимумов функции (39).

В итоге алгоритм углового сверхразрешения MUSIC представляется следующим образом:

1. Накопление цифровых отсчетов сигналов принимаемых антенной решеткой $\mathbf{x}(k), k = 1, \dots, K$ и оценка корреляционной матрицы \mathbf{R} :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k). \quad (40)$$

2. Разложение \mathbf{R} по собственным значениям и векторам:

$$\hat{\mathbf{R}} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}, \quad (41)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$.

3. Оценка числа сигналов M с помощью критериев AIC или MDL.

4. Вычисление пространственного спектра MUSIC по формуле (39).

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{\mathbf{q}^H(\alpha, \beta) \left(\sum_{i=M+1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \mathbf{q}(\alpha, \beta)}.$$

5. Определение пеленгов ИРИ $\hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m, m = 1, \dots, M$ по положениям M наибольших максимумов пространственного спектра (39).

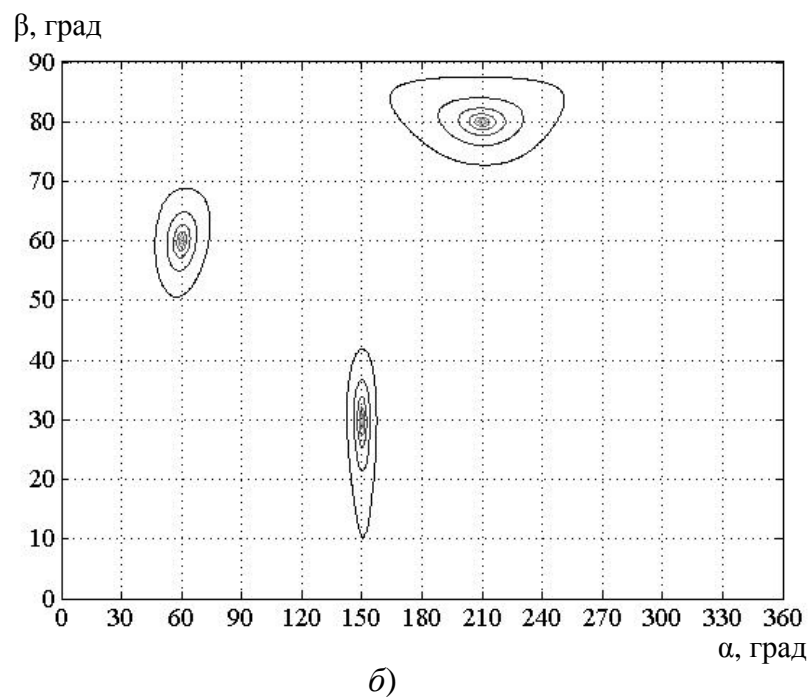
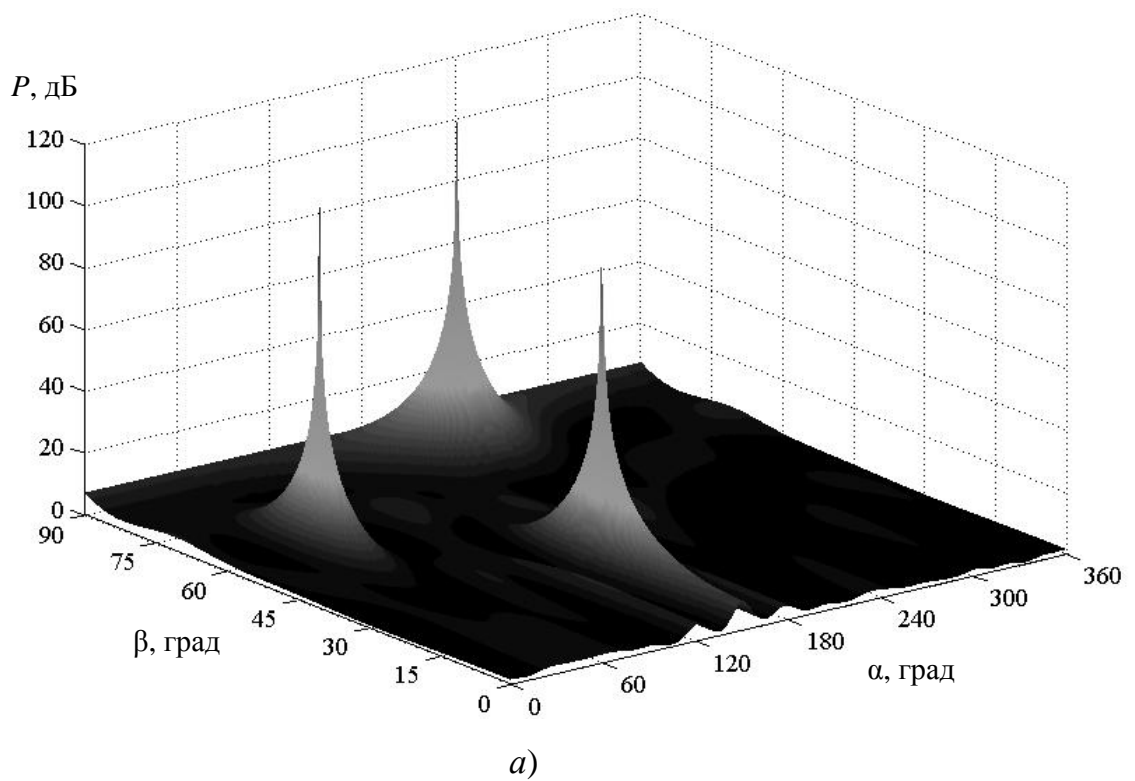


Рис. 3. Пространственный спектр алгоритма MUSIC.

На рис. 3 представлены результаты моделирования алгоритма MUSIC для случая пеленгации 3-х сигналов приходящих с направлений $\alpha_1 = 60^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 150^\circ$, $\beta_2 = 30^\circ$ и $\alpha_3 = 210^\circ$, $\beta_3 = 80^\circ$. Все сигналы имеют одинаковые несущие частоты $f_n = 3$ МГц и одинаковое отношение сигнал/шум ОСШ = 10

дБ. В качестве антенной решетки использовалась 16-ти элементная кольцевая АР с радиусом $R = 0,5\lambda$, где $\lambda = c/f_H$.