Лекция 7.

Алгоритмы параллельного обзора

Не смотря на более высокое быстродействие собственноструткурных методов пеленгации, основанных на сканировании по пространству, в сравнении с параметрическими (например, метод максимального правдоподобия), их быстродействия бывает недостаточно для работы в режиме «реального времени». Для скоростной обработки данных были разработаны эффективные собственноструктурные алгоритмы Root-MUSIC и ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique) , позволяющие определять пеленгационные углы, не используя сканирование по пространству. На практике, Root-MUSIC применяется для линейных антенных решеток (ЛАР) с АЭ, расположенными в узлах равномерной сетки, в то время как для функционирования ESPRIT необходима АР состоящая из двух одинаковых или одинаково ориентированных подрешеток.

Для Root-MUSIC задача определения угловых координат сводится к поиску корней полинома, составляемого используя выходную функцию метода MUSIC. Алгоритм Root-MUSIC, применительно к ЛАР, можно описать следующими шагами:

1. Оценка корреляционной матрицы **R.**
2. Разложение корреляционной матрицы на собственные вектора и значения.
3. Формирование матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{U}_{\mathrm{n}}\mathbf{U}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}$, где $\mathbf{U}_{\mathrm{n}} = \left[\mathbf{u}_{M+1}, \mathbf{u}_{M+2}, \ldots, \mathbf{u}_{N}\right]$ - матрица, составленная из собственных векторов **R**, определяющих шумовое подпространство.
4. Получение коэффициентов полинома путем суммирования элементов на диагоналях матрицы **C**:

$$C_l = \sum_{n-m=l} C_{mn}$$

5. Вычисление корней полинома:

$$D(z) = \sum_{l=-(N-1)}^{(N-1)} C_l z^l$$

Нахождение корней полинома аналитическими методами возможно только при N<5. В случае большого числа АЭ необходимо использовать численные методы.

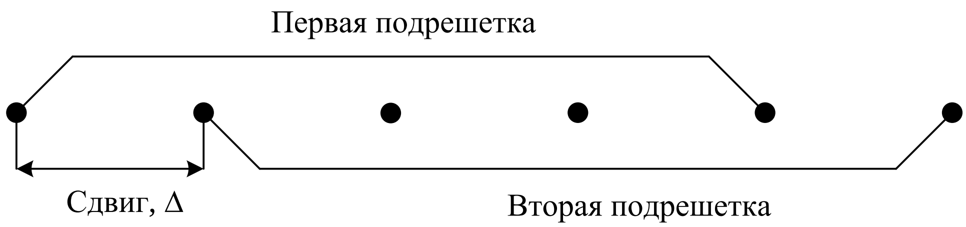
6. Отбор M значений z обладающих наибольшей амплитудой и лежащих внутри окружности единичного радиуса, на комплексной плоскости. Полином имеет 2(N-1) корней, которые формируют взаимно сопряженные пары, т.е. если z_0 является корнем уравнения, то и $1/z_0^*$ будет являться корнем. В случае отсутствия шума, полином $D(z)$ имеет M пар корней соответствующих $z_m = \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \cos(\alpha_m) \right)$, m=1…M, и 2(N-M-1) «шумовых» корней. В присутствии шума, значение корней будут смещены, но пеленгационные углы могут быть оценены по корням, лежащим наиболее близко к единичной окружности. Из-за свойства взаимной сопряженности, корни находящиеся внутри единичной окружности, содержат всю информацию о направлениях прихода сигнала.
7. Определение M пеленгационных углов по формуле:

$$\alpha_m = \arccos\left(\frac{\lambda}{2\pi d} \arg(z_m) \right) \tag{1}$$

Некоторые полезные модификации Root-MUSIC были предложены для увеличения вариантов возможного геометрического расположения АЭ на плоскости, такие как, например, UCA Root-MUSIC.

Метод ESPRIT опирается на свойство инвариантности сигнального подпространства и предполагает наличие двух идентичных подрешеток, смещенных относительно друг друга на известное расстояние Δ. В качестве подрешеток можно использовать как разнесенные в пространстве АР, так и подрешетки, построенные и на базе одной АР (Рис. 1).

а)



б)

Рис. 1 Варианты выбора подрешеток для метода ESPRIT а) на основе двух разнесенных в пространстве АР б) на основе одной АР

Одной из наиболее распространенных модификаций ESPRIT, является TLS-ESPRIT, использующий обобщенный метод наименьших квадратов, для более корректного получения решения. TLS-ESPRIT обладает лучшей точностью, при небольшом увеличении вычислительной сложности. Для ЛАР TLS-ESPRIT можно описать следующими шагами:

1. Оценка корреляционной матрицы **R**.
2. Разложение корреляционной матрицы на собственные вектора и значения.
3. Вычисление матриц $\mathbf{U}_{S1}$ и $\mathbf{U}_{S2}$:

$$\mathbf{U}_{S1} = \mathbf{J}_{S1}\mathbf{U}_{S}$$

$$\mathbf{U}_{S2} = \mathbf{J}_{S2}\mathbf{U}_{S}$$

где $\mathbf{U}_S = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_M]$- матрица, составленная из собственных векторов **R**, определяющих сигнальное подпространство. Матрицы селекции $\mathbf{J}_{S1}$, $\mathbf{J}_{S2}$ определяют положение элементов подрешеток. Например, для антенной системы, представленной на рис. 2 б) матрицы $\mathbf{J}_{S1}$, $\mathbf{J}_{S2}$:

$$\mathbf{J}_{S1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\quad\mathbf{J}_{S2}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

4. Формирование $2M \times 2M$ матрицы **G**, используя матрицы $\mathbf{U}_{S1}$ и $\mathbf{U}_{S2}$,:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{U}_{S1}^{H}\\\mathbf{U}_{S2}^{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}_{S1} & \mathbf{U}_{S2}\end{bmatrix}$$

5. Разложение матрицы **G** на собственные вектора и значения и разбиение матрицы, состоящей из собственных векторов на 4 подматрицы:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}}=\begin{pmatrix}\mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12}\\\mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22}\end{pmatrix}$$

6. Расчет матрицы $\mathbf{\Psi}$ как $\mathbf{\Psi}=-\mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^{-1}$, и выделение собственных значений.
7. Определение M пеленгационных углов по формуле (1).

Для увеличения вариантов возможного геометрического расположения АЭ на плоскости были предложены модификации ESPRIT, такие как UCA-ESPRIT для кольцевых АР и модифицированный унитарный ESPRIT для прямоугольных АР. Существует возможность расширения ESPRIT на большее чем два число подрешеток. Был разработан обобщенный ESPRIT, который применим для более широкого класса АР. В данном случае АР может состоять из расположенных на различном расстоянии друг от друга антенных пар, коллинеарных друг другу. Расстояние между АЭ, составляющими каждую пару должно быть кратно, наименьшему расстоянию среди антенных пар. При одинаковом качестве TLS-ESPRIT обладает более высоким быстродействием, чем Root-MUSIC.

Оценка числа источников сигналов

В современных методах радиопеленгации процесс обработки сигналов делиться на два этапа: определение количества источников радиоизлучения и определение пеленгов на каждый источник в отдельности. Наиболее существенное влияние ошибка при определении количества источников радиоизлучения оказывает на точность определения угловых координат собственноструктурных методов, таких как MUSIC.

Самый простой способ оценки числа сигналов основывается на том, что число сигналов, принимаемых антенной решеткой, равняется числу собственных значений корреляционной матрицы, превышающих значение средней мощности шума σ_n^2. Как определено ранее, корреляционная матрица сигналов, принимаемых антенной решеткой, определяется выражением:

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}\,.$$

Теоретически $N - M$ наименьших собственных значений равны средней мощности шума σ_n^2. Таким образом, если найдено количество наименьших собственных значений B, то число сигналов M может быть вычислено по формуле:

$$M = N - B\,.$$

Однако на практике, когда автокорреляционная матрица определяется из конечного числа цифровых отсчетов, собственные значения, связанные с мощностью шумов, не являются одинаковыми. Вместо этого они ложатся в интервал значений близких к средней мощности, при этом величина этого интервала уменьшается с ростом числа выборок.

Большинство алгоритмов по определению размерности сигнального подпространства базируются на нахождении минимума информационных критериев. В основе информационных критериев лежит логарифм функции максимального правдоподобия и штрафная функция на размерность модели.

В ряде работ были представлены критерии AIC (Akaike Information Criterion) и MDL (minimum description length), соответственно. Wax представил методику использования критериев AIC и MDL для определения количество ИРИ. Выражения для AIC MDL запишутся следующим образом:

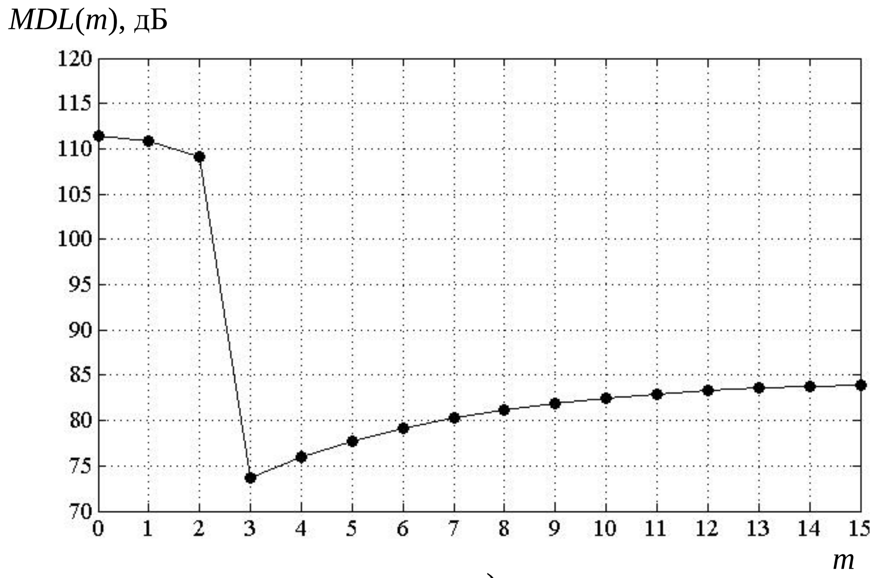
$$AIC(m) = -2H(m) + 2m(2N - m) \tag{2}$$

$$MDL(m) = -H(m) + \frac{1}{2}m(2N - m)\ln K \tag{3}$$

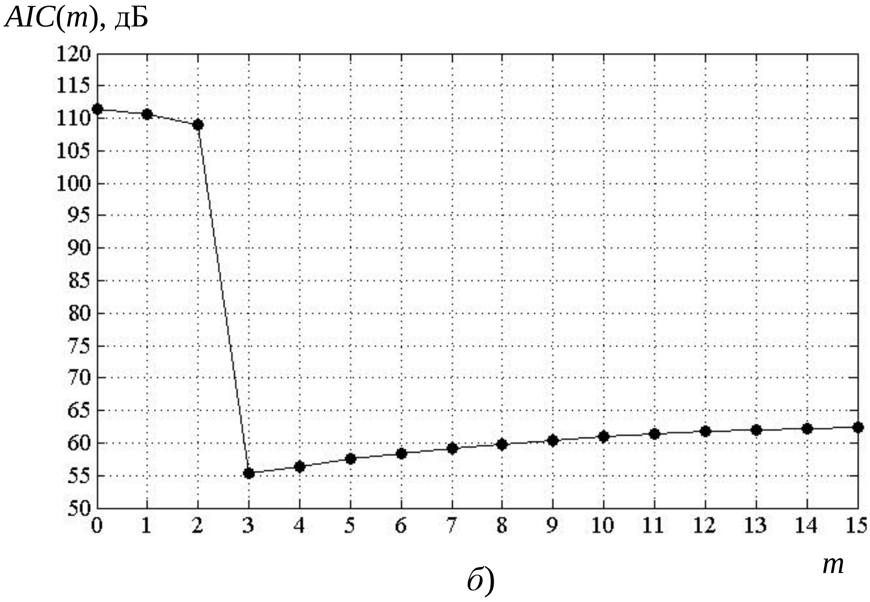
где N – количество АЭ, K – время накопления, m – предполагаемое количество сигналов, минимум информационного критерия должен соответствовать m=M, где M – количество ИРИ. $H(m)$ - логарифм функции максимального правдоподобия:

$$H(m) = \ln f\left(\mathbf{X} \middle| \sigma_{\mathrm{m}}^2, \lambda_1, ..., \lambda_m, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m\right) = K \ln\left(\left(\prod_{g=m+1}^{N} \lambda_g\right)\left(\frac{1}{N-m}\sum_{g=m+1}^{N} \lambda_g\right)^{(m-N)}\right)$$

где $\sigma_m^2 = \dfrac{1}{N-m}\sum_{g=m+1}^{N} \lambda_g$, - оценка дисперсии шума, $\mathbf{X}$ - вектор сигналов, принятых элементами АР, $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_{\mathrm{m}}$- оценки собственных чисел корреляционной матрицы **R** расположенные в порядке убывания, а $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$- соответствующие им оценки собственных векторов.



а)



б)

Рис. 3. Информационные критерии MDL (а) и AIC (б).

На рис. 3 представлены результаты моделирования критериев MDL и AIC для случая пеленгации 3-х с одинаковыми несущими частотами $f_н$ = 3 МГц и одинаковое отношение сигнал/шум ОСШ = 10 дБ. В качестве антенной решетки использовалась 16-ти элементная кольцевая АР с радиусом $R = 0{,}5\lambda$.

В общем, MDL считают более удобным для использования чем AIC. Shcwarz в своей работе, показал что если его предположения верны, то AIC не может быть асимптотически оптимальным. Zhao и пр. показали что MDL согласован (т.е. вероятность правильно определения числа источников стремиться к единице при количестве отсчетов K стремящемся к бесконечности), а AIC не согласован и склонен в свою очередь к переоценке числа источников при K стремящемся к бесконечности. Таким образом, большинство людей при обработке сигналов предпочитают использовать MDL, а не AIC.

Ясно, что основное различие между двумя критериями заключается в выборе штрафной функции на размерность модели. В ряде работ был представлен алгоритм EDC (efficient detection criterion), являющийся, по сути, обобщением предыдущих подходов. В данном методе для определения числа ИРИ необходимо минимизировать следующий функционал:

$$EDC(m) = -H(m) + m(2N - m)C_K \qquad (4)$$

где C_K - функция от К удовлетворяющая следующим условиям

1. $\lim\limits_{K \to \infty} C_K / K = 0$
2. $\lim\limits_{K \to \infty} C_K / \ln(\ln(K)) = \infty$

В ряде работ показано, что при некоторых условиях критерий EDC остается теоретически верным и в случаях, нарушения условия независимости входных данных.

Выбор $C_K = 0.5\ln(N)$ удовлетворяет условиям для C_K и таким образом является одним из частных случаев критерия EDC. Этот частный критерий идентичен MDL и показывает, что MDL является одним из частных случаев EDC. Еще одним вариантом выбора C_K может быть $C_K = \sqrt{K\ln(K)}$.

Для оценки количества ИРИ существует ряд методов опирающихся на статистическую теорию, в основе которых лежит построение гипотез о количестве минимальных эквивалентных собственных значений. Предлагается возможность использования теста сферичности, опирающегося на последовательность двойных гипотез для определения числа сигналов. Хотя качество данного метода сравнимо с информационными критериями, его редко используют из-за более высокой вычислительной сложности.

Одним из вариантов определения количества источников радиоизлучения является тест на основе множества гипотез (Multiple Hypothesis Testing), выражение для которого записывается как:

$$\Lambda(m) = (n - m)\ln\left[\frac{\prod\limits_{i=m+1}^{N}\lambda_i}{\left(\frac{1}{N-m}\sum\limits_{i=m+1}^{N}\lambda_i\right)^{N-m}}\right] - \frac{1}{2}m(2N - m - 1)\ln[n] +$$

$$+ \ln\left[\frac{\pi^{-m(2N-m-1)/2}}{\tilde{\Gamma}_{N-m}(N-m)}\right] + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{N}\ln\left[\frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i - \bar{\lambda}}\right] - \sum_{i=m+1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}2\ln\left[\frac{(\lambda_i\lambda_j)^{1/2}}{\lambda_i - \lambda_j}\right]$$

где $\overline{\lambda} = \frac{1}{N-m}\sum_{g=m+1}^{N}\lambda_g$, n=N-1, $\tilde{\Gamma}$- многомерная гамма-функция для комплексных данных. При каждом новом m данный метод использует весь набор собственных значений, что делает его более адаптивным по сравнению с информационными критериями.