

Лекция 9.

Формирование ортогональных диаграмм направленности

В современных антенно-фидерных системах информацию о пеленгационных углах ИРИ получают, путем обработки сигналов с каждого антенного элемента. Таким образом, порядок вычислительной сложности пеленгационного алгоритма составляет $O(N^m)$, где N – количество АЭ, m – определяется используемым алгоритмом. Для случаев, когда N велико, в работах был предложен способ предварительной обработки данных, путем формирования B лучей (beam space, BS), где $B < N$. Применение этого способа позволяет понизить вычислительную сложность алгоритмов с $O(N^m)$ до $O(B^m)$ операций.

Рассмотрим применение данного подхода для алгоритма MUSIC. В качестве антенной решетки будем использовать ЛАР, состоящую из N ненаправленных антенных элементов, с расстоянием между ними $d = 0,5\lambda$, где λ – длина волны, соответствующая центральной частоте принимаемых сигналов. Предположим, что на АР приходят узкополосные сигналы от M источников радиоизлучения. Общая схема алгоритма BS-MUSIC представлена на рис.1.

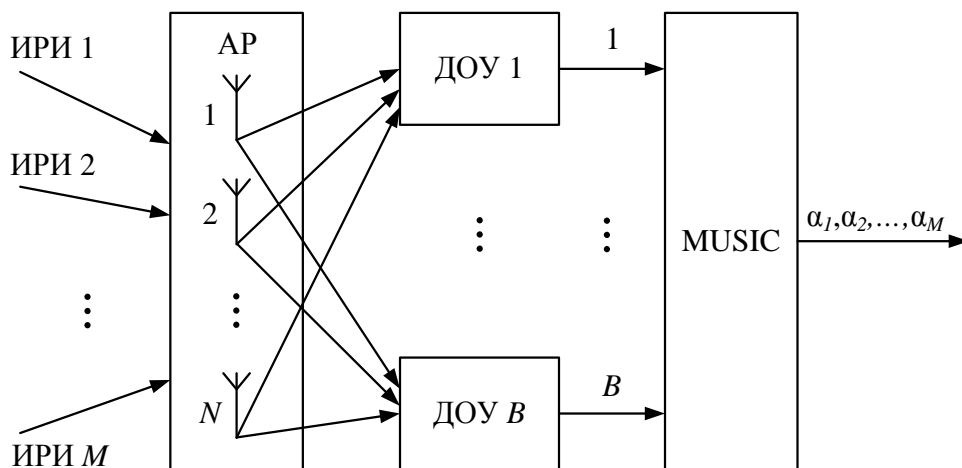


Рис.1. Блок-схема обработки сигналов алгоритмом BS-MUSIC.

Вектор сигналов с выходов диаграммообразующих устройств (ДОУ) может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}^H \mathbf{X} \quad (1)$$

где $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_B]$ – матрица размерностью $N \times B$, состоящая из B весовых векторов, с помощью которых формируется набор из B диаграмм направленности. Перепишем (1) в виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{n}_Y, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{n}_Y = \mathbf{W}^H \mathbf{n}_X. \quad (3)$$

В итоге корреляционная матрица сигналов с выходов ДОУ будет иметь вид

$$\mathbf{R}_Y = \mathbf{W}^H \mathbf{R}_X \mathbf{W} = \frac{1}{K} (\mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{A}^H \mathbf{W} + \sigma^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}). \quad (4)$$

При формировании взаимно-ортогональных весовых векторов, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{w}_i^H \mathbf{w}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (5)$$

которое означает, что максимум одной ДН совпадает с нулями всех остальных ДН, матрица \mathbf{W} будет удовлетворять соотношению

$$\mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}, \quad (6)$$

тогда соотношение (4) может быть записано в виде

$$\mathbf{R}_Y = \frac{1}{K} (\mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{A}^H \mathbf{W} + \sigma^2 \mathbf{I}). \quad (7)$$

По аналогии с MUSIC пространственный спектр алгоритма BS-MUSIC запишется следующим образом:

$$P_{BS}(\alpha) = \frac{[\mathbf{W}^H \mathbf{q}(\alpha)]^H \mathbf{W}^H \mathbf{q}(\alpha)}{[\mathbf{W}^H \mathbf{q}(\alpha)]^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{W}^H \mathbf{q}(\alpha)} = \frac{\mathbf{q}^H(\alpha) \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{q}(\alpha)}{\mathbf{q}^H(\alpha) \mathbf{W} \mathbf{U}_n [\mathbf{W} \mathbf{U}_n]^H \mathbf{q}(\alpha)}. \quad (8)$$

При цифровом формировании ортогональных ДН линейной антенной решетки с использованием дискретного преобразования Фурье формула для элемента матрицы \mathbf{W} в b -м столбце i -й строки будет выглядеть следующим образом:

$$w_{bi} = \frac{1}{N} \exp\left(j \frac{2x_b}{\lambda} \left(\pi \cos(\alpha) - \frac{2\pi}{N} \left(i - \frac{B+1}{2} \right) \right) \right) \quad (9)$$

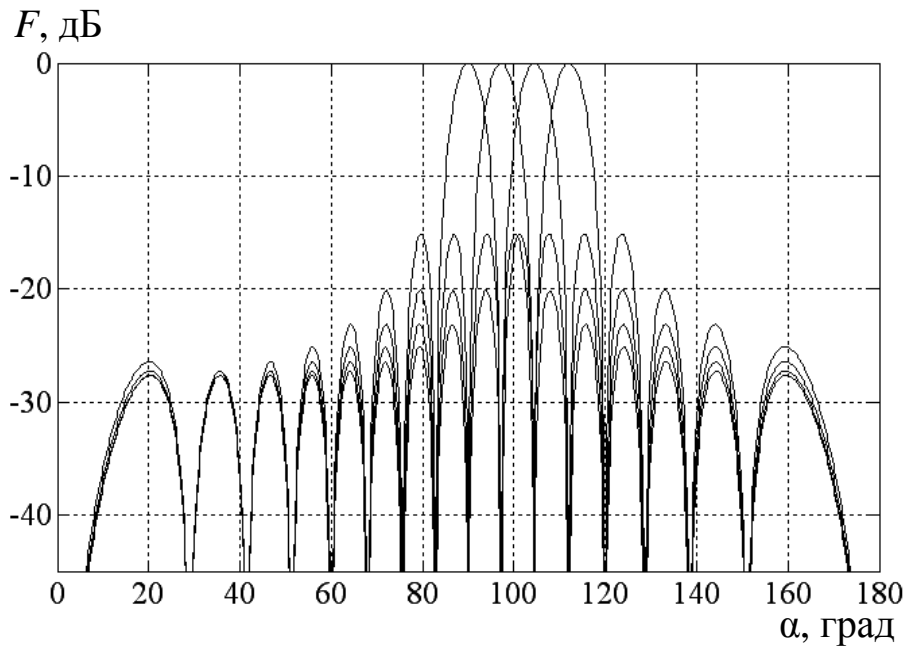


Рис. 2. Ортогональные ДН 16-ти элементной ЛАР.

Исследуем характеристики алгоритма BS-MUSIC. Для этого будем использовать линейную антенную решетку с числом антенных элементов $N = 16$ и расстоянием между элементами $d = 0,5\lambda$. Предположим, что на антенную решетку приходят два сигнала с направлений $\alpha_1 = 100^\circ$ и $\alpha_2 = 102^\circ$, с отношениями сигнал/шум $ОСШ_1 = ОСШ_2 = 15$ дБ. Сформируем 4 ортогональных ДН с максимумами в направлениях $90^\circ, 97,25^\circ, 104,5^\circ, 112^\circ$, как показано на рисунке 2. Сравним результаты пеленгации с помощью алгоритмов MUSIC и BS-MUSIC, построив графики функций (Лекция 5, ф-ла 39) и (8).

Из графиков на рисунке 3. видно, что сигналы разрешаются как алгоритмом MUSIC, так и BS-MUSIC, однако пространственный спектр, соответствующий BS-MUSIC, имеет более острые и высокие пики в направлении на сигналы.

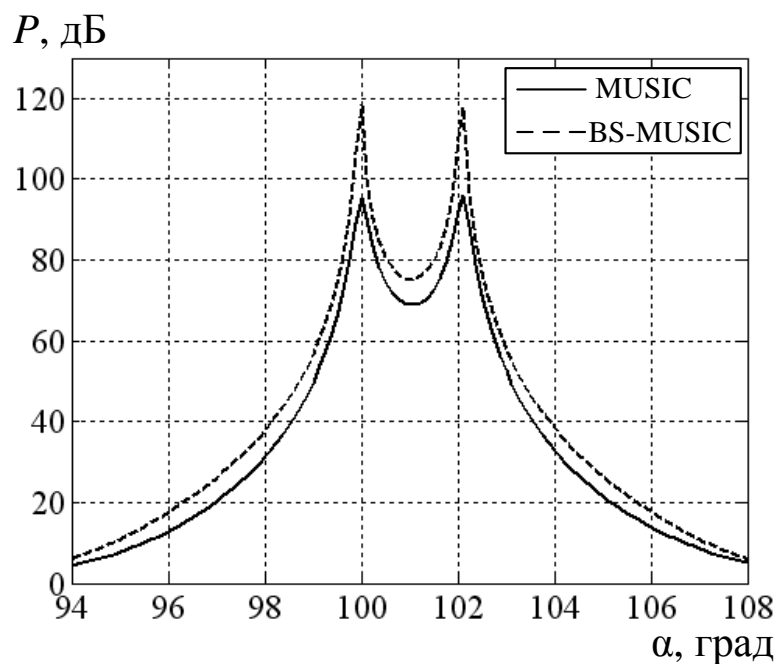


Рис. 3. Пространственный спектр алгоритмов MUSIC и BS-MUSIC для двух сигналов углами прихода $\alpha_1 = 100^\circ$ и $\alpha_2 = 102^\circ$, отношениями сигнал/шум $ОСШ_1 = ОСШ_2 = 15$ дБ.

Алгоритмы MUSIC и BS-MUSIC разрешают сигналы с определенной вероятностью P_p . Рисунок 4 отображает зависимость вероятности разрешения от отношения сигнал/шум. Значение ОСШ, при котором $P_p = 0,95$, будем называть критическим значением и обозначим $ОСШ_{кр}$.

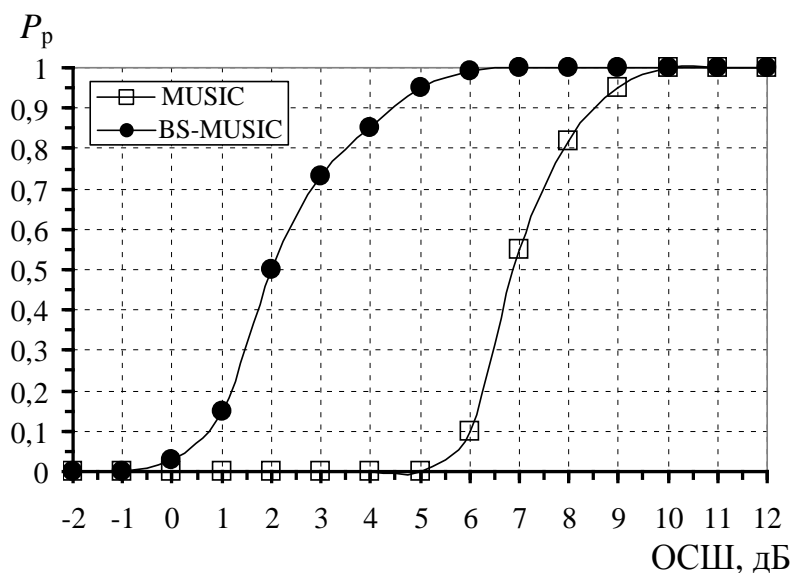


Рис. 4. Зависимость вероятности разрешения двух сигналов с углами прихода $\alpha_1 = 100^\circ$ и $\alpha_2 = 102^\circ$ от отношения сигнал/шум при $N = 16$.

Из рисунка 4 видно, что график соответствующий BS-MUSIC сдвинут в область более низких значений ОСШ относительно графика, соответствующего алгоритму MUSIC, а также имеет более пологий спад. Как видно из графиков, разность между критическими значениями ОСШ для обоих алгоритмов составляет 4 дБ, следовательно, алгоритм BS-MUSIC позволяет осуществлять пеленгацию сигналов при более низких значениях ОСШ по сравнению с MUSIC.

На рисунке 5 представлены зависимости СКО оценки пеленга от отношения сигнал/шум для двух сигналов с углами прихода $\alpha_1 = 100^\circ$ и $\alpha_2 = 110^\circ$. Из графиков на рисунке видно, что зависимости для обоих алгоритмов совпадают в области положительных значений ОСШ и расходятся в области отрицательных значений. Следует отметить, что значения СКО оценки пеленга алгоритма BS-MUSIC превышают соответствующие значения СКО MUSIC, при этом разность между значениями СКО для обоих алгоритмов увеличивается с уменьшением ОСШ.

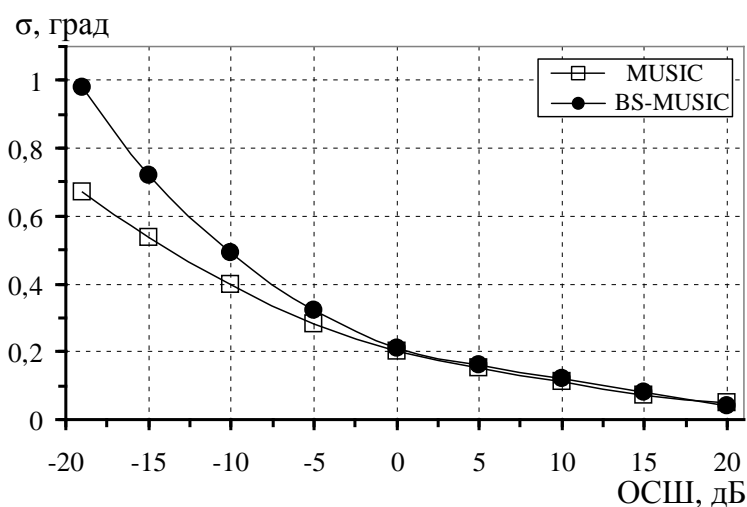


Рис. 5. Зависимость СКО оценки пеленга от отношения сигнал/шум для двух сигналов с углами прихода $\alpha_1 = 100^\circ$ и $\alpha_2 = 110^\circ$ при $N = 16$, $K = 1000$.

В заключение, отметим основные результаты, вытекающие из проведенного исследования: использование ортогональных диаграмм направленности позволяет снизить значение критического отношения сигнал/шум для алгоритма MUSIC на 4 дБ, а также повысить разрешающую

способность, однако, СКО оценки пеленга для BS-MUSIC в области отрицательных значений ОСШ несколько выше, чем для алгоритма MUSIC.

Таким образом, в случае, априорно известного сектора сканирования, применение методики формирования ортогональных диаграмм направленности дает очевидные преимущества при незначительном увеличении СКО оценки пеленга. Это говорит о том, что данный подход может эффективно использоваться в задачах скоростной пеленгации.

3.4.3 Скоростное определение собственных векторов

Одним из основных направлений повышения быстродействия собственноструктурных алгоритмов пеленгации является снижение вычислительной сложности этапа определения собственных векторов (рис 6). Существует огромное множество методов скоростного определения собственных векторов, которые по быстродействию можно разделить на три группы: методы низкой вычислительной сложности, требующие порядка $O(NM)$ операций, методы средней вычислительной сложности ($O(NM^2)$ операций) и методы высокой вычислительной сложности ($O(N^2M)$ операций).



Рис. 6. Возможность повышения быстродействия собственноструктурных пеленгационных алгоритмов.

В данном разделе представлены методы скоростного определения собственных векторов относящихся к группам средней и низкой

вычислительной сложности оптимальные по соотношению точность/быстродействие.

Одним из методов скоростного определения собственных векторов является метод OPERA (Operator Restriction Analysis). Суть данного метода заключается в поиске проекций входного вектора данных на подпространство меньшей размерности (обычно это сигнальное подпространство, размерности M , где $M < N$), где производится определение собственных векторов и значений, после чего, производится обратный переход к исходной координатной системе.

Алгоритм OPERA можно разделить на 5 этапов:

1. Вычисление проекции входного вектора данных $\mathbf{X}(k)$ на новую координатную систему с инвариантным подпространством в качестве базиса $\mathbf{U}_S = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_M]$.

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_M \ y_{M+1}]^T \quad (10)$$

где

$$[y_1 \ y_2 \ \dots \ y_M]^T = \mathbf{U}_S^H \mathbf{X}(k) \quad (11)$$

и

$$y_{M+1} = \|\mathbf{a}\|, \quad \mathbf{a} = \mathbf{X}(k) - \mathbf{U}_S \mathbf{y} \quad (12)$$

Этап расчета вектора \mathbf{y} занимает $18NM + 4N + 1$ операций.

2. Вычисление собственных векторов и значений матрицы \mathbf{C} , полученной путем одноранговой модификации.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_M & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{y}\mathbf{y}^H = \mathbf{U}_C \mathbf{\Lambda}_C \mathbf{U}_C \quad (13)$$

Расчет матрицы \mathbf{C} требует $6(M+1)^2 + M$ действий, вычисление собственных векторов и значений можно реализовать за $23(M+1)^3$

операций, следовательно общие затраты на данный этап составляют $23M^3+75M^2+82M+29$ флопов.

3. Проекция полученных собственных векторов на исходную координатную систему.

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U}_x \mathbf{U}_c \quad (14)$$

где

$$\mathbf{U}_x = \left[\mathbf{U}_s \quad \frac{\mathbf{a}}{y_{M+1}} \right] = \left[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_M \quad \frac{\mathbf{a}}{y_{M+1}} \right] \quad (15)$$

Определение матриц \mathbf{U}_x и \mathbf{U}' занимает $2N$ и $8N(M+1)^2$ операций соответственно. В общем, вычислительная сложность данного этапа составляет $8NM^2+16NM+10N$ флопов.

4. Обновление собственных векторов и значений, с удалением собственного вектора соответствующего наименьшему собственному значению $\mathbf{U} = \mathbf{U}'$.
5. Повторение пунктов 1-4 для каждого нового набора цифровых отсчетов.

В итоге для определения M собственных векторов и значений на каждой итерации необходимо $8NM^2+23M^3+34NM+75M^2+14N+82M+30$ операций.

В ряде работ показано преимущество OPERA над схожим по структуре алгоритмом FAST по точности определения искомым собственным векторов. В одной из работ продемонстрировано, что OPERA обладает меньшей чувствительностью к шуму, лучшим разрешением и более быстрой сходимостью, чем FDPМ и PASTd.

Далее рассмотрим один из основных алгоритмов в группы низкой вычислительной сложности, алгоритм PAST, отличающийся сравнительной с остальными алгоритмами точностью и простотой реализации.

В основе адаптивного метода PAST используется рекурсивный метод наименьших квадратов, для минимизации линейного критерия анализа главных компонент:

$$J(\mathbf{U}(k)) = E \left\{ \left\| \mathbf{X}(k) - \mathbf{U}(k) \mathbf{U}^H(k) \mathbf{X}(k) \right\|^2 \right\} \quad (16)$$

где $\mathbf{X}(k)$ – вектор данных, $\mathbf{U}(k)$ – матрица размерностью $N \times M$. При достижении функцией $J(\mathbf{U}(k))$ глобального минимума, матрица $\mathbf{U}(k)$ будет содержать M – доминантных собственных векторов.

Алгоритм PASTd является расширенной версией PAST, в которой производится последовательная оценка собственных векторов и значений, путем удаления вклада собственных векторов из разложения Karhunen-Loève:

$$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{y}_m - \mathbf{u}_m(k) \mathbf{u}_m^H(k) \mathbf{y}_m(k) \quad (17)$$